Esercizi funzioni implicite

I.1. Studiare il luogo degli zeri delle seguenti funzioni e tracciarne il grafico qualitativo:

(1) $F(x,y) = e^{xy} - \log x + y$; (2) $F(x,y) = y^3 e^{-x} + x^2 e^y$;

(3) $F(x,y) = x^2 - y e^{y\sqrt{x}}$; (4) $F(x,y) = 3e^{5x+4y} + 2y - 15x - 3$.

I.2. Verificare che l'equazione (vettoriale) $\mathbf{F}(x,y,z) = \mathbf{0}$, dove

$$\mathbf{F}(x,y,z) = \begin{pmatrix} y\cos(xz) - x^2 + 1 \\ y\sin(xz) - x \end{pmatrix} ,$$

in un intorno di $(1, 1, \pi/2)$ definisce implicitamente una sola funzione $\mathbf{g}$ della variabile x e calcolarne la matrice Jacobiana nel punto $(1, \pi/2)$.

I.3. Data la funzione

$$\mathbf{F}(x,y,z,w) = \begin{pmatrix} xy + z^2 + xw - 8 \\ x^2 w + 2xy - w^2 + 1 \end{pmatrix} ,$$

verificare che $\mathbf{F}(0,1,2,-1) = \mathbf{0}$ e determinare la matrice Jacobiana di ogni funzione definita implicitamente dall'equazione sopra, matrice Jacobiana calcolata nel punto corrispondente.

I.4. Dimostrare che l'equazione

$$2x^2 + 2y^2 + z^2 - 8xz - z + 8 = 0$$

in un intorno di $(2, 0, 1)$ definisce implicitamente una funzione $z = f(x,y)$ e calcolarne la matrice Hessiana nel punto stesso.